

LES ENSEMBLES DE NOMBRES

La numération

C'est un ensemble de signes et de mots qui organise et désigne une quantité ou une position. Ce système utilise 10 symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 appelés « chiffres » et la position qu'ils occupent correspond à une valeur particulière : dans le nombre 253, le chiffre 2 correspond à 2 centaines, le 5 correspond à 5 dizaines et le 3 correspond à 3 unités. Les mots-nombres renvoient à une quantité.

Ecrire un nombre : signifie être capable de l'écrire de façon numérale mais aussi littérale avec l'utilisation des mots-nombres. On parle de numération parlée et chiffrée.

Nommer un nombre : signifie être capable de le lire. Il faut donc maîtriser le système de numération de position : un chiffre a une valeur selon sa place dans le nombre.

Le calcul mental doit occuper la place la plus importante à l'école élémentaire. Il peut être :

- **Réfléchi** : il s'apparente à une résolution de problème, le calcul est plus long (car il est propre à chaque individu) aucune procédure n'est privilégiée.
- **Automatisé** : exercice routinier, les résultats sont obtenus par des procédures mémorisées.

Les élèves doivent savoir :

- Désigner un nombre (savoir que le nombre de billes dans le sac est : 6).
- Comparer (savoir quel est le plus petit et le plus grand des nombres).
- Opérer (addition, soustraction...)
- Utiliser les nombres pour résoudre des problèmes (en les manipulant)

Quand peut-on pratiquer le dénombrement ?

- Pendant l'accueil (jeux mathématiques)
- Pendant les rituels (on compte les présents, on fait la date)
- En ateliers (on trie des formes géométriques)
- En motricité (« à l'intérieur du cerceau »)
- N'importe quand (« Prenez un plot pour deux »)

Il faut veiller à respecter les principes suivants :

- Le principe d'ordre conventionnel = la suite des nombres
- Le principe de correspondance = un mot/nombre correspond à un seul objet
- Le principe cardinal = dans un dénombrement le dernier mot/nombre renvoie à la quantité de la collection entière
- Le principe d'ordre indifférent = on peut compter dans n'importe quel ordre
- Le principe d'abstraction = je peux ajouter 1 à ma collection de 5 billes (sans la voir)

Les procédures utilisées pour apprendre à compter sont :

- le comptage = récitation de la comptine numérique
- le surcomptage = commencer à compter à partir d'un nombre : 5-6-7
- le décomptage = compter à l'envers (à partir d'un nombre dans le sens décroissant 9-8-7)

Les nombres étudiés à l'école

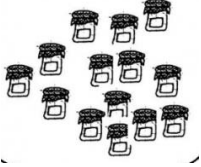


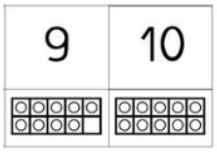

Les entiers naturels

Les rationnels => on parle de fractions

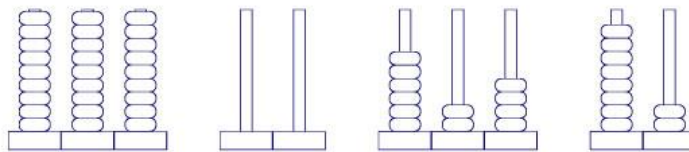
Les décimaux => introduits à partir des fractions décimales

Un seul irrationnel => ce mot n'est pas employé à l'école. On évoque pi.

Représentation des nombres

Des collections	Des représentations digitales	Des constellations	Des cartes à point	Des boîtes Ex : Picille
				

- Des objets tous identiques => l'élève regroupe 10 jetons pour représenter la dizaine par exemple.
- Les échanges => l'élève échange 10 ronds contre 1 carré (pour la dizaine) opération mentale.
- Les bouliers qui parlent suivant la position
- Les abaques



Les nombres en maternelle

- Pendant l'accueil (jeux mathématiques)

- Pendant les rituels → on compte les présents, on fait la date
- Pendant les rituels → calendrier, éphéméride, on découvre le nombre suivant
- En ateliers (on trie des formes géométriques)
- En motricité (« à l'intérieur du cerceau »)
- N'importe quand (« Prenez un plot pour deux »)

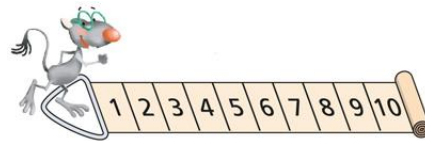
Les représentations chiffrées

Les chiffres et les symboles

$$24 = 10 + 10 + 4$$

$$24 = 2 \times 10 + 4$$

La bande numérique



Le tableau de numération

CLASSE DES MILLIERS			CLASSE DES UNITÉS SIMPLES		
c	d	u	c	d	u
100 000	10 000	1 000	100	10	1

Le tableau des nombres

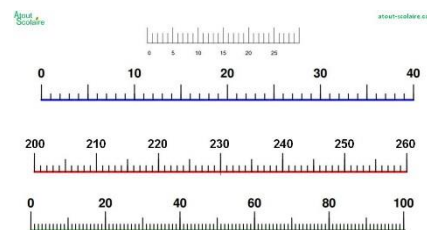
en découpant la bande numérique on obtient des groupements par dizaines

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

Les compteurs



La droite graduée



La calculatrice



La construction du nombre

Les compétences logiques

- Trier => selon un critère ex : trier tous les jetons jaunes (donc écarter les autres)
- Ranger => ex : ranger les livres de la bibliothèque par taille
- Enumérer

Pour qu'un élève soit capable de dénombrer une collection il doit :

- 1. Connaître la comptine numérique.**
- 2. Comprendre le principe de cardinalité : dans tout comptage, le dernier nombre renvoie à l'ensemble de la collection.** 1,2,3,4,5 = j'ai 5 bonbons.
- 3. Comprendre le principe d'abstraction : toutes sortes de collections peuvent être rassemblées et comptées.** Il faut être capable de se créer mentalement une quantité : 2 poires et 3 pommes = 5 fruits.
- 4. Comprendre la non pertinence de l'ordre : être capable de compter à l'envers, de deux en deux...**
- 5. Etre capable d'énumérer.** Pointer une fois 5 objets différents de façon à ce qu'un objet n'ait jamais été compté 2 fois (il semblerait que l'énumération ne soit pas assez travaillé à l'école). Ex : tous les élèves lèvent la main, quand l'enfant qui compte a touché la main d'un élève il peut baisser le bras. Activité : la maîtresse pose sur la table 30 pions. « Combien y a-t-il de pions ? ». But : amener l'enfant à trier (mettre de côté les pions comptés pour ne pas les recompter deux fois).

Les cinq principes du dénombrement selon Rachel Gelman

Le principe de l'inclusion et l'expérience de Jean Piaget

Certains élèves n'arrivent pas à associer les unités.

Il y a des marguerites et des bleuets. « Compter les marguerites ». « Maintenant comptez le nombre de fleurs » → les élèves comptent uniquement les bleuets et non pas les marguerites.

Les différents contextes du nombre

A quoi servent les nombres ?

Aspect ORDINAL : ça donne du sens, il s'agit de tout ce qui renvoie à un ordre chronologique

- A se repérer dans le temps (exemple : la date)
- A utiliser une règle graduée
- A se repérer dans un jeu (exemple : je suis sur la case 2 et toi sur la case 5 donc tu es plus loin)

Exemple : compter les présents lors de l'appel. On peut compter à l'endroit, l'envers, faire exprès de se tromper. On peut compter dans sa tête puis à un moment interroger un élève.

Aspect CARDINAL : il s'agit de tout ce qui renvoie à une quantité

- A mémoriser
- A comparer
- A répondre à des problèmes
- A anticiper le résultat d'une action avant qu'elle ait lieu

Exemple d'activité : j'ai un sac opaque « je mets 3 pions, puis 2 pions. Combien y a-t-il de pions dans le sac ?

Mesure d'une GRANDEUR

Exemple : je mesure la longueur d'un ruban : 3cm.

DESIGNATION d'un objet ou d'une personne.

Exemple d'activité : Rayan est le joueur n°3.

Définitions

Compter = savoir réciter la comptine numérique jusqu'à 30 en maternelle.

Sport : compter le nombre de défenseurs et d'attaquants.

Dénombrer = savoir extraire un nombre. Faire le lien entre un nombre et la quantité à laquelle il est associé. Pour dénombrer il faut savoir compter.

Activité 1 : bouteilles + bouchons. « Est-ce qu'il y a autant de bouteilles que de bouchons ? » → oui si on a mis un bouchon sur chaque bouteille.

Activité 2 : bouteilles + bouchons. Eloigner la bassine. L'enfant doit se lever et compter pour connaître le nombre de bouchons qu'il ira chercher. Puis on lui dit qu'il n'a droit à un seul voyage.

Activité 3 : dans un car il y a 7 places libres. Vas chercher le bon nombre de voyageurs pour remplir le car (tu n'as le droit qu'à un seul voyage). 1,2,3,4,5,6,7 → il faut donc 7 voyageurs... (on travaille la mémorisation et la comparaison).

Activité : le jeu de la bataille (celui qui a le plus d'étoiles gagne).

Subitizing = repérer sans compter les toutes petites quantités. La reconnaissance immédiate d'une quantité n'est plus possible au-delà de 6 éléments.

Enumérer = pointer une fois 5 objets différents de façon à ce qu'un objet n'ait jamais été compté 2 fois (il semblerait que l'énumération ne soit pas assez travaillée à l'école). Ex : tous les élèves lèvent la main, quand l'enfant qui compte a touché la main d'un élève il peut baisser le bras.

Activité : la maîtresse pose sur la table 30 pions. « Combien y a-t-il de pions ? ».

But : amener l'enfant à trier (mettre de côté les pions comptés pour ne pas les recompter deux fois).

La manipulation facilite l'apprentissage. Les compléments à 10 sont importants pour le calcul mental. La comptine numérique est une sorte de rite initiatique pour l'enfant car elle lui permet d'accéder au savoir des adultes.

Les variables didactiques = ce que le maître peut changer pour faire évoluer l'activité (ex : changer le nombre de places libres etc).

Difficultés pour les élèves

Les nombres 11, 12, 13, 14, 15, 16 (car ce sont des mots simples)

Comprendre la juxtaposition des mots : trois cents = 3×100 (les mots se multiplient)

Cent quatre = $100 + 4$ (les mots s'ajoutent).

Saut dans la comptine numérique (1,2,3,5,6,7...)

Utiliser une mauvaise technique pour dénombrer une collection (compter un à un au lieu de faire des paquets).

La numération décimale (10)

👉 *Attention il faut maîtriser le système décimal, thème récurrent du CRPE*

Il s'agit d'organiser les collections en paquets de 10. Chaque unité restante dans un certain ordre (exemple : dizaine) est représentée par un chiffre forcément inférieur à 10.

Dizaines de mille	Milliers	Centaines	Dizaines	Unités simples
6	7	5	0	3

Mis à part le zéro (qui ressemble à un o) la graphie des chiffres est différente de celle des lettres.

Dans 67503, le chiffre des centaines est 5, et il y a 675 centaines.

$$abcde = (a \times 10\,000) + (b \times 1\,000) + (c \times 500) + (d \times 10) + e$$

$$10^0 = 1$$

$$\text{R\`egle : } 10^n \times 10^p = 10^{n+p}$$

La numération de « position » consiste à donner une place précise à un chiffre, ce qui lui donne une valeur → il s'agit alors d'une dizaine, ou d'une centaine... Le zéro représente l'absence d'unités d'un certain ordre. Dans 408, le zéro indique l'absence d'unités de dizaines, et il indique que le 4 occupe la place des centaines.

Difficultés et erreurs

« Si je rajoute un zéro dans le 10 ça fait 20 » CP → 1 zéro (10) 2 zéros (20).

17 devrait s'écrire « 107 ». Faire comprendre à l'élève que dans « 100 » il y a 1 centaine 10 dizaines et 100 unités, faire des échanges, organiser des quantités...

Erreurs dans le passage d'un code à l'autre :

Deux cent dix => 200 10

84 => lu huit quatre

Quatre vingt => 420

Exemple d'activités sur le nombre en maternelle

Représenter le nombre

Maternelle – activité collective => montrer une carte ou un dé (ex : 3) et demander aux élèves de montrer la collection correspondante.

Activité pour comprendre que le nombre renvoie à une quantité

GS - Présenter un bus (boîte à chaussures) avec un certain nombre de places : certaines occupées d'autres libres. => demander aux élèves d'aller chercher le nombre de voyageurs nécessaires pour remplir le bus en un seul voyage.

On peut reprendre la même activité pour mettre la table, faire un dessin géométrique avec des buchettes à aller chercher etc.

Le jeu du cache

Sur une carte il y a x ronds bleus dessinés. Les élèves se mettent d'accord sur le nombre de ronds présents. Le PE cache une partie des ronds. Les élèves doivent deviner combien de ronds ont été cachés uniquement en tenant compte des ronds qui ne sont pas cachés.

Progressivité des apprentissages de la PS au CM2

- Connaître (écrire et nommer) : Connaître les différents codes et les décompositions : deux-cent-quarante-huit = $248 = 2 \times 100 + 4 \times 10 + 8$...
- Comparer
- Ranger
- Encadrer les nombres entiers

Situation de référence

Le jeu du banquier (cycle 2) proposé par ERMEL, pour comprendre la dizaine (faire des échanges et des groupements).

Les variables didactiques

- La taille des collections
- Des collections réelles ou évoquées
- Des collections manipulables ou non
- Des collections proches ou éloignées
- Matériel à disposition

Construction des fractions et des décimaux

Les élèves vont devoir :

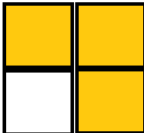
- Renoncer à la notion de suivant, accepter l'intercalation sans fin
- Accepter que l'écriture d'un nombre n'est pas unique
- Accepter qu'un nombre n'est pas seulement une suite de chiffres mais peut avoir une écriture fractionnaire
- Renoncer à certaines règles qui ne concernent que les nombres entiers :
 - * « plus un nombre a de chiffres plus il est grand »
 - * « pour multiplier un nombre par 10 on ajoute un zéro à sa droite »
 - * « multiplier augmente, diviser diminue » etc.

Les fractions

Les fractions sont des nombres rompus.

A l'école, il faut modéliser les situations pour comprendre les nombres rationnels :

$\frac{3}{4}$ c'est trois fois $\frac{1}{4}$

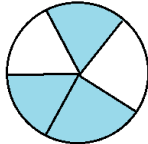


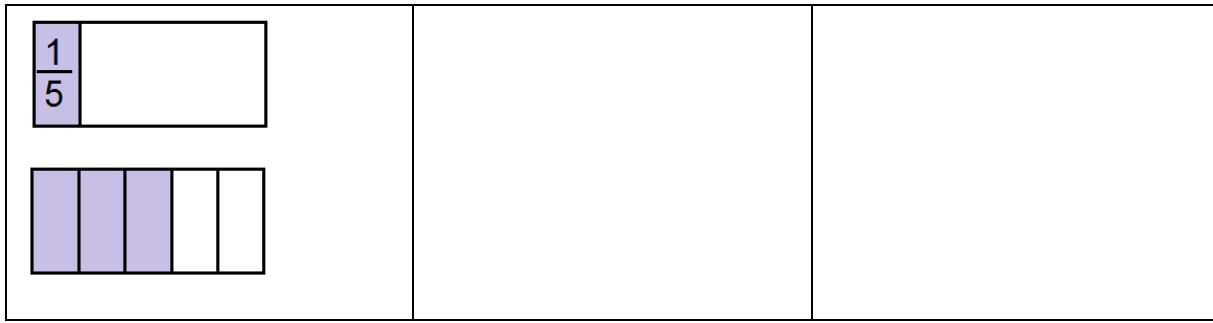
Une fraction est irréductible si le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

Les rationnels modélisent des situations en faisant apparaître un rapport constant, une proportionnalité :

4 objets identiques coutent 13€. Combien coûte un objet ?

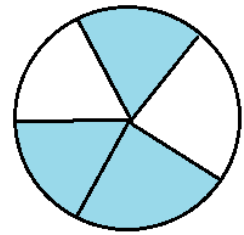
Nombre d'objets	Prix des objets en euros
4	13
1	13/4

Le partage	Le nombre	La proportion
<p>$\frac{3}{5}$ c'est trois fois un cinquième. C'est la conception la plus utilisée à l'école.</p>	<p>C'est le résultat de la division de 3 par 5.</p> <p>Mais on introduit 3 fois $\frac{1}{5}$^e de X, et non pas 3 divisé par 5.</p>	<p>Prendre les $\frac{3}{5}$^e d'une quantité.</p> 



Il est important de varier les représentations graphiques des fractions.

$$\frac{3}{5}$$



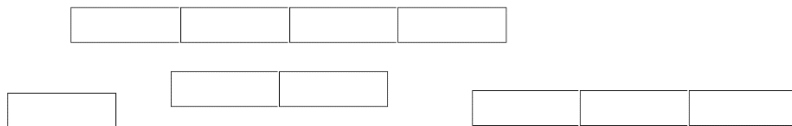
Il est important pour la suite des apprentissages de comprendre la signification du tiers comme **une partie de l'unité que l'on a partagée** en trois et donc que l'unité se reconstitue avec 3 tiers.

Ainsi dans $11/3$ on a : $3/3 + 3/3 + 3/3 + 2/3 = 1 + 1 + 1 + 2/3 = 3 + 2/3$

Situations de référence

Exemple d'activité pour montrer la nécessité des fractions (Ermel)

Il y a des bandes différentes placées sur la table (du type $1/4$, $5/2$ etc). Le groupe 1 doit indiquer sur un papier quel segment il a choisi.



Le groupe 1 doit indiquer sur un papier quel segment il a choisi.

Activité : utiliser une écriture chiffrée qui a les mêmes règles que les entiers

On reprend le tableau de numération et on le prolonge.

Les décimaux

Difficulté pour les décimaux : les élèves peuvent interpréter la virgule comme une séparation entre deux entiers, ce qui est renforcé par l'oralisation 3,17 → trois virgule dix-sept... L'enseignant doit constamment montrer la relation entre écriture à virgule et écriture fractionnaire, et oraliser les différentes formes :

$$3,17 \text{ c'est } 3 \text{ et } \frac{17}{100} \quad \text{ou encore} \quad 3 + \frac{1}{10} + \frac{7}{100}$$

Difficulté pour ranger les nombres décimaux à virgule : les élèves pensent que $6,2 < 6,19$...

On introduit d'abord les fractions simples (demi, tiers, quart), puis les fractions décimales ($1/10$, $1/100$ etc), puis l'écriture des décimaux.

On retrouve les tâches usuelles sur les nombres : connaître (écrire et nommer), comparer, ranger, encadrer, repérer et placer sur une droite graduée.

Matériel

- La droite graduée pour montrer la densité des nombres décimaux.
- Des jetons de couleurs : jaune pour un centième, vert pour un dixième etc.
- Des feuilles quadrillées pour représenter les dixièmes, centièmes etc.

Vocabulaire

On distingue : **nombre décimal** et **écriture décimale**.

Il s'agira de **bannir l'expression nombre-à-virgule** car elle peut induire en erreur : l'enfant peut imaginer qu'il s'agit de deux nombres entiers juxtaposés. De plus, l'enfant pense que la caractéristique d'un nombre décimal est la virgule, ce qui l'empêche de considérer que 3 est aussi un nombre décimal.

Lire 3,15 de trois manières différentes dans l'idéal :

- Trois virgule quinze (langage courant)
- Trois unités et quinze centièmes
- Trois unités, un dixième et 5 centièmes

Variables didactiques

- Nombre de chiffres pour chaque décimal
- Même nombre de chiffres après la virgule ou non (3,17 – 3,8 – etc.)
- Désignation des nombres : à l’oral, décimale, fractionnaire, canonique...
- Matériel de représentation ou non

Erreurs typiques (liées à l’idée erronée qu’un décimal = juxtaposition de 2 entiers)

$3,4 \times 10 = 30,4$

$15,16 > 18,1$ (car il a plus de chiffres)

Persistance de la notion de suivant :

Exemple : 3,5 suit 3,4 => difficultés pour intercaler un nombre.

Confusion entre les décimaux et les fractions (barre = virgule)

Exemple : $3,4 = 3/4$!

Confusions entre les dizaines, et les dixièmes...

- Au niveau phonétique
- Au niveau de la désignation de la position des chiffres : le rang des chiffres est symétrique par rapport au chiffre des unités.

Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités			Partie décimale		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
						3	4		1	6	5



Les rangs des chiffres sont symétriques par rapport au chiffre des unités (et non par rapport à la virgule!)

Calculs

Erreurs sur l'addition

$$\begin{array}{r} 11 \\ 137 \\ + 548 \\ + 46 \\ \hline 1145 \end{array}$$

erreur dans la disposition spatiale des nombres

$$\begin{array}{r} 12 \\ 137 \\ + 548 \\ + 46 \\ \hline 741 \end{array}$$

erreur de comptage

$$\begin{array}{r} 12 \\ 137 \\ + 548 \\ + 46 \\ \hline 611 \end{array}$$

les retenues ne sont pas prises en compte

$$\begin{array}{r} 11 \\ 137 \\ + 548 \\ + 46 \\ \hline 721 \end{array}$$

les retenues sont toujours égales à 1

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 137 \\ + 548 \\ + 46 \\ \hline 911 \end{array}$$

toutes les retenues sont posées sur le chiffre de gauche. Pas de sens donné à la retenue

$$\begin{array}{r} 21 \\ 137 \\ + 548 \\ + 46 \\ \hline 812 \end{array}$$

inversion entre le chiffre à poser et la retenue. Non compréhension de la retenue

$$\begin{array}{r} 137 \\ + 548 \\ + 46 \\ \hline 61321 \end{array}$$

pose systématique des sommes sans considération de la retenue

Erreurs sur la soustraction

$$\begin{array}{r} 305 \\ - 187 \\ \hline 118 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 305 \\ - 187 \\ \hline 298 \end{array}$$

L'élève considère que c'est impossible d'enlever 9 à "rien" donc il laisse le chiffre 9 dans la colonne des dizaines

$$\begin{array}{r} 305 \\ - 187 \\ \hline 282 \end{array}$$

L'élève soustrait toujours le plus petit chiffre au plus grand indépendamment de sa position

Erreurs sur la multiplication

Idem que pour les autres techniques opératoires

+ difficultés avec la règle du zéro

+ règles de la distributivité

Erreurs sur la division

Idem que pour les autres techniques opératoires

+ maîtriser les 3 autres opérations

$$\begin{array}{r|l} 1458 & 7 \\ 14 & 208 \\ \hline 05 & \\ \hline 58 & \\ 56 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1458 & 7 \\ 14 & 207 \\ \hline 0058 & \\ 49 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

le reste est supérieur au diviseur

$$\begin{array}{r|l} 1458 & 7 \\ 14 & 28 \\ \hline 0058 & \\ 56 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

omission des zéros du quotient

pour éviter cette erreur: déterminer à priori le nombre de chiffres du quotient